ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΙΙ

Φυλλάδιο 8
Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Στον $\mathbb{C}^3$ εφοδιασμένο με το συνήθες μιγαδικό Ερμητιανό γινόμενο να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται απο τα διανύσματα
$$u = (1, 1, i), \quad w = (0, i, -1).$$

2. Βρείτε $x, y \in \mathbb{C}$ ώστε ο πίνακας
$$\begin{pmatrix} 3i/5 & x \\ -4i/5 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$
να είναι μοναδιαίος.

3. Θεωρούμε τον Ερμητιανό πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$
Βρείτε τις ιδιοτιμές του A. Βρείτε μοναδιαίο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

4. (α) Θεωρούμε τον πίνακα
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$
Δείξτε ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

(β) Θεωρούμε τον πίνακα
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$
Δείξτε ότι ο B είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$ με ιδιοτιμές i και $-i$. Βρείτε αντιστρέψιμο $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ώστε ο πίνακας $P^{-1}BP$ να είναι διαγώνιος.

5. Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $B = A^tA$ είναι συμμετρικός άρα διαγωνίσιμος. Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του B είναι μη αρνητική και ότι ο B είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραιος $m > 0$ ώστε $A^m = \mathbb{O}_{n\times n}$. Δείξτε ότι ο A είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας. Βρείτε μη μηδενικό πίνακα $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ έτσι ώστε $B = B^t$ και $B^2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$.

7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Υποθέτουμε ότι $A^3 = A^2$. Δείξτε ότι $A^2 = A$.

8. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(x,y) = 2xy$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας της Q έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. Να βρείτε γραμμικά πολυώνυμα

$$P(x,y) = c_1x + c_2y \quad \kappa\alpha\iota \quad R(x,y) = c_3x + c_4y$$

τέτοια ώστε

$$Q(x,y) = \lambda_1\{P(x,y)\}^2 + \lambda_2\{R(x,y)\}^2$$

για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ για τον οποίο ισχύει

$$A^2 + aA + bI_n = 0,$$

όπου a, b πραγματικοί αριθμοί.

(α) Εάν $a^2 - 4b > 0$, να δείξτε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

(β) Εάν $a^2 - 4b < 0$, να δείξετε ότι ο πίνακας A δεν είναι διαγωνίσιμος.

(γ) Εάν $a^2 - 4b = 0$ δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος μόνο εάν $A = -\frac{a}{2}I_n$.

(δ) Δείξτε ότι αν $b \neq 0$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Σε αυτή την περίπτωση εκφράστε τον A^{-1} συναρτήσει των πινάκων A και I_n.

10. Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος $\mathbb{K}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda \neq 0$ και το λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή του A^{-1}. Επίσης, δείξτε ότι $V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$.

(β) Δείξτε ότι ο A^{-1} είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν ο A είναι διαγωνίσιμος.

11. Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας.

(α) Εάν το 3 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, δείξτε ότι το 15 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $2A^2 - 3I_n$.

(β) Έστω ότι $A^2 = 4I$. Τί γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τι για το χαρακτηριστικό; Είναι ο A διαγωνίσιμος;

12. Έστω $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης $T : V \to V$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v. Δείξτε ότι

(α) τα u, v είναι γραμμικά ανεξάρτητα και (β) για κάθε $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, το $au + bv$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της T.

13. Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ορθογώνιων $n \times n$ πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

14. Δείξτε ότι αν ένας ορθογώνιος πίνακας είναι και τριγωνικός τότε είναι διαγώνιος.

15. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (2x + y + 4z, 3x + 3z, 4x + 2y + z).$$

Βρείτε την προσαρτημένη απεικόνιση T^* του T ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

16. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες. Να δείξετε ότι:

(α) ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι ο A^{-1} είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος,

(β) ο πίνακας $xA + yB$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όπου x, y είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε ένας τουλάχιστον από τους δύο να είναι διάφορος του μηδενός.

(γ) ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

17. Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/\sqrt{8} & \sqrt{3}/\sqrt{8} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{8} & 3/4 & -1/4 \\ -\sqrt{3}/\sqrt{8} & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σε αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και το συνημίτονο της γωνίας στροφής.

18. Για ποιές τιμές του $b \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο

$$P(x) = (x^{16} - 9x + b)(x - 3)^{2014}$$

μηδενίζεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

19. Να εξετάσετε αν ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

είναι θετικά ορισμένος.

20. Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

είναι διαγωνίσιμος.

21. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

όπου k, m, n πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε τις τιμές των k, m, n για τις οποίες ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

(β) Για τις παραπάνω τιμές των k, m, n, βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και χρησιμοποιήστε το για βρείτε τον αντίστροφο του A. Επίσης, να δείξτε ότι

$$A^{2017} + A^{2016} - 10A^{2015} + 8A^{2014} = \mathbb{O}_{3\times 3}.$$

22. Έστω W ο υποχώρος του χώρου $\mathbb{R}_2[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 2 που παράγετε από τα πολυώνυμα $p_1(x) = x + 1$ και $p_2(x) = x^2 + 1$. Εφοδιάζουμε τον χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(α) Να ορίσετε μια ισομετρία από τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$, εφοδιαμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_{can}$, στον W.

(β) Βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W στον $\mathbb{R}_2[x]$.

(γ) Βρείτε την ορθογώνια προβολή του $p_3(x) = x^2 + x + 1$ στον W.

23. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε την απεικόνιση $\langle \cdot\,, \cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3,$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

(α) Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

(β) Να βρεθεί μια ισομετρία $T : (\mathbb{R}^3, \langle \cdot\,, \cdot\rangle) \to (W, \langle \cdot\,, \cdot\rangle_{can})$, όπου με $\langle \cdot\,, \cdot\rangle_{can}$ συμβολίζουμε το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$ και W είναι ο υποχώρος

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - 2z + w = 0\}$$

του $\mathbb{R}^4$.

24. Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και γράψτε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των I_3 και A.

25. Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

26. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ που πληρούν τις παρακάτω συνθήκες:

- $A \neq I_2$ και $B \neq -I_2$,
- $A^3 - A^2 + A - I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$,
- $B^3 + B^2 + B + I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$,

Δείξτε ότι οι πίνακες A, B έχουν τα ίδια ελάχιστα και χαρακτηριστικά πολυώνυμα, δηλαδή ότι $m_A(x) = m_B(x)$ και $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

27. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του A.

(β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(γ) Δείξτε ότι $A^{593} - 2A^{15} + A = \mathbb{O}_{3\times 3}$.

28. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2.$$

Να βρεθεί ο πίνακας A της Q. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή Q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

29. Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

(α) Να βρεθεί ο πίνακας A της Q. Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή Q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν.

(β) Να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας B έτσι ώστε $B^2 = A$.

30. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ -3 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & -7 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

31. Εξετάστε αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα κάθετο σ' αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και το συνημίτονο της γωνίας στροφής.

32. Βρείτε έναν διαγωνίσιμο 3×3 πίνακα A με πραγματικούς συντελεστές ο οποίος να πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

- βαθμίδα ίση με 2
- ιδιοτιμές το 0 και το 1
- ιδιοδιανύσματα τα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A;

33. Συμπληρώστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ * & * & * \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ώστε να είναι ορθογώνιος.

34. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A = A^t$. Δείξτε ότι αν u και v είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε $\langle u, v\rangle = 0$.

35. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (y, ax + az, y)$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Βρείτε για ποιές τιμές του a η T δεν διαγωνοποιείται.

2/06/2016 Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ.

#Φυλλάδιο 8

$\boxed{\text{Άσκηση 15}}$ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $T(x,y,z) = (2x+y+4z, 3x+3z, 4x+2y+z)$

Βρείτε την προσαρτημένη T^* της T ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός: $<T(\vec{a}), \vec{b}> = <\vec{a}, T^*(\vec{b})>$

$A = [T]_\varepsilon^\varepsilon$, ε ορθοκανονική βάση

$[T^*]_\varepsilon^\varepsilon = A^* = A^{-t} = A^t$

↳ πάνω από τους πραγματικούς.

ε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο $\Big\}$ $\varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$[T]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{array}{ccc} & & \\ \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right) \\ \uparrow T(1,0,0) \quad \uparrow T(0,1,0) \quad \uparrow T(0,0,1) \end{array} . \quad [T^*]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+4z \\ 1x+2z \\ 4x+3y+z \end{pmatrix}$

$T^*(x,y,z) = (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z)$

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ:

Έστω $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$

(με τον ορισμό $<T(\vec{a}),\vec{b}> = <\vec{a}, T^*(\vec{b})>$

$<T(\vec{a}),\vec{b}> = <(2x_1+y_1+4z_1, 3x_1+3z_1, 4x_1+2y_1+z_1),(x_2,y_2,z_2)> =$

$= (2x_1+y_1+4z_1)x_2 + (3x_1+3z_1)y_2 + (4x_1+2y_1+z_1)z_2 =$

$= 2x_1x_2 + y_1x_2 + 4z_1x_2 + 3x_1y_2 + 3z_1y_2 + 4x_1z_2 + 2y_1z_2 + z_1z_2 =$

$= x_1(2x_2+3y_2+4z_2) + y_1(x_2+2z_2) + z_1(4x_2+3y_2+z_2) =$

$= <(x_1,y_1,z_1),(2x_2+3y_2+4z_2, x_2+2z_2, 4x_2+3y_2+z_2)> =$

$= <(x_1,y_1,z_1), T^*(x_2,y_2,z_2)>.$

Άσκηση 6 ## Φυλλάδιο 2

$A \in K^{n\times n}$, λ ιδιοτιμή του A. Νδο $\phi(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή το $\phi(A)$ και ότι

$V_A(\lambda) \subseteq V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$

Λύση: Έχω ένα $\phi \in K[x]$ πολυώνυμο

$$\phi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \exists X \in K^{n\times 1}$ με $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $X \in V_A(\lambda)$ τέτοιο ώστε

$$AX = \lambda X.$$

Θέλω να δείξω ότι: $\phi(A)X = \phi(\lambda)X$.

$$\phi(A)X = (a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n)X =$$

$$= a_n A^n X + a_{n-1}A^{n-1}X + \dots + a_1 AX + a_0 I_n X =$$

$$= a_n \lambda^n X + a_{n-1}\lambda^{n-1}X + \dots + a_1 \lambda X + a_0 X \Rightarrow$$

$\phi(\lambda)X = (a_n\lambda^n + \dots + a_0)X$, $X \neq 0$. Άρα $\phi(\lambda)$ ιδιοτιμή του $\phi(A)$

και X ιδιοτιμή του $\phi(A)$.

$\Rightarrow X \in V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$\begin{cases} AX = \lambda X, \quad A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X. \\ A^3 X = \dots = \lambda^3 X \\ \vdots \\ A^n X = \dots = \lambda^n X \end{cases}$$

Νδο αν A διαγωνίσιμος $\Rightarrow \phi(A)$ διαγωνίσιμος.

A διαγωνίσιμος $\Rightarrow \exists P \in K^{n\times n}$ αντιστρέψιμος: $P^{-1}AP$ = διαγώνιος Δ

ή. $A = P\Delta P^{-1}$

$$\phi(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0$$

$$P^{-1}\phi(A)P = P^{-1}(a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I)P =$$

$$= a_n P^{-1}A^n P + a_{n-1}P^{-1}A^{n-1}P + \dots + a_0 P^{-1}IP =$$

$$= a_n \Delta + a_{n-1}\Delta^{n-1} + \dots + a_1\Delta + a_0 I = \begin{pmatrix} \phi(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \phi(\lambda_2) & 0 \\ 0 & & \phi(\lambda_n) \end{pmatrix}$$ Διαγώνιος

Δ^x παραμένει διαγώνιος

Δείξτε ότι δεν ισχύει γενικά (με ένα παράδειγμα) η ισότητα:

$$V_A(\lambda) = V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$$

Λύση: Αρκεί να βρω έναν μη διαγωνίσιμο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(x) = x^3, \text{ ιδιοτιμή το } 0.$$

$$m_A(x) = x$$

$$m_A(A) = 0 \rightsquigarrow A \neq 0.$$

$\Longrightarrow$ A όχι διαγωνίσιμος

$\phi(x) = x^3$.

$V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$V_{\phi(A)}(\phi(\lambda)) = V_{0_{3\times3}}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-0 & 0 \\ 0 & 0 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\phi(x) = x^3$

$\phi(A) = A^3 \quad \xRightarrow{C.H.} \quad -A^3 = 0.$

$\chi_A = -x^3$.

$$V_{0_{3\times3}}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix} \middle| t, u, .. v \in \mathbb{R} \right\} =$$

$\left.\begin{matrix} x = t \\ y = u \\ z = v \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$.

$$= \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$V_A(\lambda) \neq V_{\phi(A)}(\phi(\lambda)) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Άσκηση 2 # Φυλλάδιο 3

$T(x,y,z) = (2x, 2y+az, 3x+bz)$

Να βρεθούν τα a, b τέτοια ώστε T διαγωνίσιμη

$$[T]^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 3 & 0 & b-x \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & b-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(b-x)$$

Ιδιοτιμές: $b, 2$.

(i) Αν $b=2$, 2 με αλγεβρική πολλαπλότητα 3

(ii) Αν $b \neq 2$ ιδιοτιμές, b με αλγ. πολλαπλ. 1 και 2 με αλγ. πολ. 2.

▶ $b=2 \Rightarrow$

$\dim V(2) = 3$.

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\dim V(2) = \underbrace{3}_{\to \text{διάσταση του } A} - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Για ποιό a η $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ αδύνατο.

Έχω μια αρνητική αρχική μονάδα $\operatorname{rank} \neq 0$

σίγουρα $\Rightarrow b = 2$.

▶ $b \neq 2 \Rightarrow \dim V(2) = 2$.

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim V(2) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{θέλω } \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b \neq 2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow T$ διαγωνίσιμος αν $b \neq 2$ και $a = 0$

Παράδειγμα

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&b\\1&0&\gamma\end{pmatrix}$$ θέλω $\operatorname{rank}A=1$.

Τον φέρνω σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix}1&0&\gamma\\a&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-ar_1}\begin{pmatrix}1&0&\gamma\\0&0&b-a\gamma\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow b-a\gamma=0\Rightarrow b=a\gamma.$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&0&\gamma\\0&0&b-a\gamma\\0&0&0\end{pmatrix}=2\Rightarrow b-a\gamma\neq 0$$

Άσκηση: 3 # Φυλλάδιο 7

$F(x,y,z)=(\alpha x-y+z\,,\,-x+by-z\,,\,x-y+2z)$

Ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα 2

Διαγωνίσιμος σημαίνει αλγεβρική πολλαπλότητα = γεωμετρική πολλαπλότητα

$$[F]^{\varepsilon}_{\varepsilon}=\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&b&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}=A\,,$$ συμμετρικός

Φασματικό $\Rightarrow$ διαγωνίσιμος

1 ιδιοτιμή του A με πολλαπλότητα 2

και έχουμε γεωμετρική πολλαπλότητα = αλγεβρική : $\dim V(1)=2$

$2=\dim V(1)=3-\operatorname{rank}(A-1I)\Rightarrow \operatorname{rank}(A-I)=1.$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}a-1&-1&1\\-1&b-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}=1$$ (μία αρχική μονάδα)

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\\alpha-1&-1&1\\-1&b-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-(a-1)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1+(a-1)&-1\\0&b-2&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&a-2&2-a\\0&b-2&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}a-2=0\\b-2=0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\alpha=2\\b=2\end{matrix}$$

Επομένως:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}2-x&-1&1\\-1&2-x&-1\\1&-1&2-x\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2}{=\!=}\begin{vmatrix}1-x&1-x&0\\-1&2-x&-1\\1&-1&2-x\end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&2-x&-1\\1&-1&2-x\end{vmatrix}=$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1-x&1-x\\1&-1&2-x\end{vmatrix}=(1-x)^2\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&2-x\end{vmatrix}=(1-x)^2(4-x)$$

Ιδιοτιμές: 1 (διπλή)
4 (απλή)

$$V(4)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{pmatrix}2-4&-1&1\\-1&2-4&-1\\1&-1&2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&1&0\\-1&-2&-1&0\\1&-1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&0\\-1&-2&-1&0\\-2&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&0\\0&-3&-3&0\\0&-3&-3&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow\left.\begin{aligned}x-y-2z&=0\\y+z&=0\\z&=t\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}x&=t\\y&=-t\\z&=t\end{aligned}\quad\text{με } t\in\mathbb{R}.$$

$$V(4)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\-1/\sqrt3\\1/\sqrt3\end{pmatrix}\right\rangle \text{ και } V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}\right\rangle$$

Θέλω ορθοκανονική βάση, άρα κάνω Gram-Schmidt:

$$\vec{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\vec{a_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b_1}=\vec{a_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\frac{\langle\vec{a_2},\vec{b_1}\rangle}{\langle\vec{b_1},\vec{b_1}\rangle}\vec{b_1}=\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

Επομένως η βάση που ψάχνουμε

$$\vec{\gamma_1}=\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\1/\sqrt2\\0\end{pmatrix},\quad\vec{\gamma_2}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6\\1/\sqrt6\\2/\sqrt6\end{pmatrix}.$$

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta = \begin{pmatrix} \text{ιδιο} & & 0 \\ & \text{τιμές} & 0 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$ $\boxed{\text{διαγώνιος πίνακας}}$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Ελεγχος</u>: Για να δώ αν έχω κάνει σωστές πράξεις πάω στον πίνακα P και βλέπω:

(i) Κάθε στήλη έχει μέτρο $=1$

(ii) Οι στήλες ανά δύο έχουν εσωτερικό γινόμενο $=0$

$B^m = A$, $m \in \mathbb{N}$

(πχ) $\Gamma^m = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[m]{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[m]{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[m]{1} \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \sqrt[m]{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m.$

$P^tAP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. θέτω $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Gamma^m = P^tAP \Rightarrow P\Gamma^m P^t = A \Rightarrow A = (P\Gamma P^t)^m$

$B = P\Gamma P^t$. οι B, Γ είναι όμοιοι μεταξύ τους $\Rightarrow$ έχουν τις <u>ίδιες</u> ιδιοτιμές

A θετικά ορισμένος αφού οι ιδιοτιμές είναι θετικές (>0)

Άσκηση 14 #Φυλλάδιο 8

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
, άνω τριγωνικός.

$a_{11}=\pm 1$ γιατί η κάθε στήλη έχει μέτρο $=1$

Εσωτερικό γινόμενο πρώτης και δεύτερης στήλης $=0$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow a_{12}=0.$$

$a_{1n}=0$. άρα

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Με επαγωγή δείχνω ότι
$a_{22}=\pm 1$
$a_{33}=\pm 1$
$\vdots$
$a_{nn}=\pm 1$.

και $a_{ij}=0$ για $i\neq j$

Άσκηση 16 #Φυλλάδιο 8.

(α) A συμμετρικός (+) θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ ιδιοτιμές θετικές
$\Rightarrow$ Το 0 δεν είναι ιδιοτιμή $\Rightarrow$ $\det A\neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

Αφού A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists$ ο A^{-1}.
A συμμετρικός $\Rightarrow A^t=A$

$(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}=A^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ συμμετρικός

A θετικά ορισμένος αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές.
$\Rightarrow \lambda_1>0, \lambda_2>0, \dots, \lambda_n>0$.
$\underbrace{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}}_{>0}$ είναι οι ιδιοτιμές του A^{-1}.
, A^{-1} θετικά ορισμένος

(γ) $A+I_n$ αντιστρέψιμος (με απαγωγή σε άτοπο)
Έστω $\det(A+I_n)=0 \Rightarrow \lambda=-1<0$ $\boxed{\text{Άτοπο}}$ αφού A θετικά ορισμένος
$A+I_n$ αντιστρέψιμος $\Longleftrightarrow \det(A+I_n)\neq 0$.

Άσκηση 17 , Φυλλάδιο 8

Παριστάνει στροφή επιπέδου όταν:

(1) $\det A = \dots = 1$

(2) $A^t A = \dots = I_3$ (ορθογώνιο)

$V(1) = \langle \vec{e_1} \rangle$

$tr(A) = tr \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $tr(A) = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta$

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$.

Άσκηση 21

κάτω τριγωνικός

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$, $rank(A - 1I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = 1$

οποιαδήποτε 2×1 ορίζουσα $= 0$

$\boxed{kn = m}$

$1 \leq \dim V(2) \leq 1 \Rightarrow \dim V(2) = 1$.

$\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-2)$

$\dim V(1) = 2$.

Θέλω $rank(A - 1I) = 1$.

$\dim V(1) = 3 - rank(A - 1I)$, όπου 3 το πλήθος των αγνώστων

$\xrightarrow{r_3 - n r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ (m-n)k & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ασκηση 38}}$ #Φυλλάδιο 8

Αφού έχω $3\times3 \Rightarrow$ ιδιοτιμές $0,1$ η μία διπλή η άλλη απλή

$\dim V(0) = 3 - \text{rank}(A) = 3-2 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 0 \text{ , απλή} \\ \lambda_2 = 1 \text{ , διπλή}\end{array}\right\} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]^{\varepsilon}_{a}[L_A]^{a}_{a}\cdot[I]^{a}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon}_{\varepsilon}$$, α κανονική βάση

η ε έχει τα ιδιοδιανύσματα:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$P = [I]^{a}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$\boxed{m_A(x) = (x-1)x.}$$